

Les 90 premières décimales de π :

3, 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825

L'usage de la lettre grecque π , première lettre de « *περίμετρος* » — *périmètre* en grec, n'est apparu qu'au xviii^e siècle.

Ce n'est cependant qu'au xviii^e siècle que [Johann Heinrich Lambert](#) prouve que le nombre π est [irrationnel](#).

Au cours du xx^e siècle, d'autres démonstrations furent trouvées. L'une d'entre elles, due à [Ivan Niven](#), est très largement connue. Une preuve similaire avait été trouvée quelques temps auparavant par [Mary Cartwright](#).

Transcendance

π est aussi un [nombre transcendant](#), c'est-à-dire non [algébrique](#) : il n'existe pas de [polynôme](#) à coefficients [rationnels](#) dont π soit une [racine](#).

C'est au xix^e siècle que ce résultat est démontré. En 1873, [Charles Hermite](#) prouve que la base du [logarithme népérien](#), le [nombre e](#), est transcendant. En 1882, [Ferdinand von Lindemann](#) généralise son raisonnement en un théorème (le [théorème d'Hermite-Lindemann](#)) qui stipule que, si x est algébrique et différent de zéro, alors e^x est transcendant. Or $e^{i\pi}$ n'est pas transcendant (puisque'il est égal à -1). Par [contraposée](#), $i\pi$ n'est pas algébrique donc (comme i , lui, est algébrique) π est transcendant.

Une conséquence importante de la transcendance de π est que celui-ci n'est pas [constructible](#). En effet, le [théorème de Wantzel](#) énonce en particulier que tout nombre constructible est algébrique.

Ainsi, la [quadrature du cercle](#) est impossible.

Représentation décimale

Alors qu'en 2007, on connaît plus de 10^{12} (un billion de) décimales de π , de nombreuses applications n'ont besoin que d'une dizaine de chiffres, comme l'estimation de la circonférence d'un cercle. Par exemple, la représentation décimale de π [tronquée](#) à 39 décimales est suffisante pour estimer la circonférence d'un cercle dont les dimensions sont celles de l'univers observable avec une précision comparable à celle du rayon d'un atome d'[hydrogène](#).

Par ailleurs, le développement décimal de π ouvre le champ à d'autres questions, notamment celle de savoir si π est un [nombre normal](#), c'est-à-dire que ses chiffres en écriture décimale sont équirépartis. On peut aussi se demander si π est un [nombre univers](#), ce qui signifie qu'on pourrait trouver dans son développement décimal n'importe quelle suite finie de chiffres. En 2006, il n'existait pas de réponse à ces questions.

Représentation fractionnaire

Les fractions de nombres entiers suivantes sont utilisées pour mémoriser ou approximer π dans des calculs (*nombre de chiffres significatifs entre parenthèses*): $\frac{3}{1}$ (1); $\frac{22}{7}$ (3); $\frac{333}{106}$ (5); $\frac{355}{113}$ (7); $\frac{103\,993}{33\,102}$ (9); $\frac{104\,348}{33\,215}$ (10); $\frac{208\,341}{66\,317}$ (10)

Découvert en 1855, le [papyrus de Rhind](#) recopié par le scribe

égyptien Ahmès contient une évaluation de π de $\frac{256}{81}$.

Le texte indien *Shatapatha Brahmana* donne à π une valeur de $\frac{339}{108}$.

C'est dans le traité d'[Archimède](#) (-287, -212) intitulé *De la mesure du cercle* que l'on peut lire une démonstration liant l'aire du disque et l'aire du triangle ayant pour base le périmètre du cercle et pour hauteur le rayon, démontrant ainsi qu'une même constante apparaît dans le rapport entre aire du disque et carré du rayon et entre périmètre et diamètre.

Il démontre ainsi que $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$. Archimède s'arrête à 96 côtés car les calculs qu'il est amené à effectuer, avec valeurs approchées, sont déjà longs pour l'époque.

Le mathématicien chinois [Zu Chongzhi](#) donne une approximation rationnelle encore plus précise de π : $355/113$ et montre que $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, en utilisant l'algorithme de Liu Hui appliqué à un polygone à 12 288 côtés.

Cette valeur demeure la meilleure approximation de π au cours des 900 années qui suivent.

Suites et séries

De nombreuses suites ou séries convergent vers π ou un multiple rationnel de π et sont même à l'origine de calculs de valeurs approchées de ce nombre.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{(-1)^i}{2i+1} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{formule de } \a href="#">Leibniz, [Gregory](#) et Madhava de Sangamagrama)$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{2i+2}{2i+1} \times \frac{2i+2}{2i+3} \times \dots = \frac{\pi}{2} \quad (\text{produit de } \a href="#">Wallis)$$

π dans l'art

Il est vrai que le rapport entre le périmètre et le double de la hauteur de la pyramide de Khéops est bien voisin de π . Faut-il pour autant y chercher une intention ? Rien n'est moins sûr puisqu'il n'en est pas de même pour les autres pyramides.

Mémorisation de π

Le record de mémorisation de π reconnu par le Guinness des records est de 67 890 chiffres, détenu par Lu Chao, un jeune diplômé chinois. Il lui a fallu 24 heures et 4 minutes pour réciter les 67 890 premières décimales de π sans erreur.

Il y a plusieurs façons de retenir les décimales de π , dont des poèmes dont le nombre de lettres de chaque mot correspond à une décimale, les mots de 10 lettres représentant un 0. En voici quelques exemples :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !

Immortel Archimède, artiste, ingénieur,

(variante : *Glorieux Archimède, artiste ingénieux,*)

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?

(variante : *Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,*)

Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

(variante : *Soit ton nom conservé par de savants grimoires.*)

Jadis, mystérieux, un problème bloquait

Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose

Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.

Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez

Défié Pythagore et ses imitateurs.

Comment intégrer l'espace plan circulaire ?

Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira

Dedans un hexagone ; appréciera son aire

Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :

Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculée approchera ;

Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur

De cet inquietant cercle, ennemi trop rebelle

Professeur, enseignez son problème avec zèle

Un autre poème :

Car j'aime à faire apprécier ce nombre, objet des soins patients, longtemps répétés, engendrés par ce dur problème grec : "carre" le cercle. Même son nom habituel est un symbole (périmètre) utile.

En anglais

How I wish I could enumerate Pi easily, since all these horrible mnemonics prevent recalling any of pi's sequence more simply.

Comme j'aimerais pouvoir réciter Pi sans problème, puisqu'aucun de ces horribles moyens mnémotechniques ne permettent de s'en souvenir facilement.

May I have a large container of coffee

Qu'on m'apporte un grand pot de café!

En allemand

Wie ? O ! Dies π Macht ernstlich so vielen viele Müh !

Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,

Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein !

Comment ? ô ! Ce π donne sérieusement du mal à autant, autant d'hommes !

Apprenez toujours, jeunes hommes, les petits vers facile, comme par exemple, celui-ci qui est sans doute facile à retenir.

En espagnol

Con 1 palo y 5 ladrillos se pueden hacer mil cosas.

Avec 1 bâton et 5 briques, on peut faire mille choses.

Sol y Luna y cielo proclaman al divino autor del cosmo.

Soleil et Lune et Ciel acclament le divin auteur du cosmos.

table de multiplication avec $A = 3,14159265$

les produits avec un carré sont soulignés

$A \times 2 = 6,2831853$	$A \times 28 = 87,9645942$	$A \times 55 = 172,78759575$	$A \times 82 = 257,6105973$	$A \times 108 = 339,2920062$
$A \times 3 = 9,42477795$	$A \times 29 = 91,10618685$	$A \times 56 = 175,9291884$	$A \times 83 = 260,75218995$	$A \times 109 = 342,43359885$
<u>$A \times 4 = 12,5663706$</u>	$A \times 31 = 97,38937215$	$A \times 57 = 179,07078105$	$A \times 84 = 263,8937826$	$A \times 111 = 348,71678415$
$A \times 5 = 15,70796325$	$A \times 32 = 100,5309648$	$A \times 58 = 182,2123737$	$A \times 85 = 267,03537525$	$A \times 112 = 351,8583768$
$A \times 6 = 18,8495559$	$A \times 33 = 103,67255745$	$A \times 59 = 185,35396635$	$A \times 86 = 270,1769679$	$A \times 113 = 354,99996945$
$A \times 7 = 21,99114855$	$A \times 34 = 106,8141501$	$A \times 61 = 191,63715165$	$A \times 87 = 273,31856055$	$A \times 114 = 358,1415621$
$A \times 8 = 25,1327412$	$A \times 35 = 109,95574275$	$A \times 62 = 194,7787443$	$A \times 88 = 276,4601532$	$A \times 115 = 361,28315475$
<u>$A \times 9 = 28,27433385$</u>	<u>$A \times 36 = 113,0973354$</u>	$A \times 63 = 197,92033695$	$A \times 89 = 279,60174585$	$A \times 116 = 364,4247474$
$A \times 11 = 34,55751915$	$A \times 37 = 116,23892805$	<u>$A \times 64 = 201,0619296$</u>	$A \times 91 = 285,88493115$	$A \times 117 = 367,56634005$
$A \times 12 = 37,6991118$	$A \times 38 = 119,3805207$	$A \times 65 = 204,20352225$	$A \times 92 = 289,0265238$	$A \times 118 = 370,7079327$
$A \times 13 = 40,84070445$	$A \times 39 = 122,52211335$	$A \times 66 = 207,3451149$	$A \times 93 = 292,16811645$	$A \times 119 = 373,84952535$
$A \times 14 = 43,9822971$	$A \times 41 = 128,80529865$	$A \times 67 = 210,48670755$	$A \times 94 = 295,3097091$	<u>$A \times 121 = 380,13271065$</u>
$A \times 15 = 47,12388975$	$A \times 42 = 131,9468913$	$A \times 68 = 213,6283002$	$A \times 95 = 298,45130175$	<u>$A \times 144 = 452,3893416$</u>
<u>$A \times 16 = 50,2654824$</u>	$A \times 43 = 135,08848395$	$A \times 69 = 216,76989285$	$A \times 96 = 301,5928944$	<u>$A \times 169 = 530,92915785$</u>
$A \times 17 = 53,40707505$	$A \times 44 = 138,2300766$	$A \times 71 = 223,05307815$	$A \times 97 = 304,73448705$	<u>$A \times 196 = 615,7521594$</u>
$A \times 18 = 56,5486677$	$A \times 45 = 141,37166925$	$A \times 72 = 226,1946708$	$A \times 98 = 307,8760797$	<u>$A \times 225 = 706,85834625$</u>
$A \times 19 = 59,69026035$	$A \times 46 = 144,5132619$	$A \times 73 = 229,33626345$	$A \times 99 = 311,01767235$	<u>$A \times 289 = 907,92027585$</u>
$A \times 21 = 65,97344565$	$A \times 47 = 147,65485455$	$A \times 74 = 232,4778561$	$A \times 101 = 317,30085765$	<u>$A \times 324 = 1017,8760186$</u>
$A \times 22 = 69,1150383$	$A \times 48 = 150,7964472$	$A \times 75 = 235,61944875$	$A \times 102 = 320,4424503$	<u>$A \times 361 = 1134,11494665$</u>
$A \times 23 = 72,25663095$	<u>$A \times 49 = 153,93803985$</u>	$A \times 76 = 238,7610414$	$A \times 103 = 323,58404295$	<u>$A \times 441 = 1385,44235865$</u>
$A \times 24 = 75,3982236$	$A \times 51 = 160,22122515$	$A \times 77 = 241,90263405$	$A \times 104 = 326,7256356$	<u>$A \times 484 = 1520,5308426$</u>
<u>$A \times 25 = 78,53981625$</u>	$A \times 52 = 163,3628178$	$A \times 78 = 245,0442267$	$A \times 105 = 329,86722825$	<u>$A \times 529 = 1661,90251185$</u>
$A \times 26 = 81,6814089$	$A \times 53 = 166,50441045$	$A \times 79 = 248,18581935$	$A \times 106 = 333,0088209$	<u>$A \times 576 = 1809,5573664$</u>
$A \times 27 = 84,82300155$	$A \times 54 = 169,6460031$	<u>$A \times 81 = 254,46900465$</u>	$A \times 107 = 336,15041355$	<u>$A \times 625 = 1963,49540625$</u>

$$\pi^2 \approx 9,86960438$$

$$\pi : 3 \approx 1,04719755$$

$$1 : \pi \approx 0,31830989$$

π

Boîte à outils du prof de maths