Mathématiques générales pour le lycée

1 Quelques notions autour de la théorie (naïve) des ensembles

Au lycée, nous nous contenterons d'imaginer un *ensemble* comme une **collection figée d' "objets"** tous distinguables - ces derniers étant plus traditionnellement appelés *éléments*.

Nous aurons généralement affaire à des ensembles dont la nature des éléments est purement mathématique
(par exemple : des ensembles de nombres, de points géométriques, ou encore de fonctions),
mais nous serons également amenés à en considérer d'autres, de compositions plus exotiques
(par exemple : lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine, M. Cessio est un élément de l'ensemble des professeurs du lycée, une calculatrice scientifique est un élément de l'ensemble des fournitures scolaires demandées cette année).

De la même manière que l'on a besoin du nombre zéro, on dispose de l'*ensemble vide* qui ne possède aucun élément. Cet ensemble est désigné par le symbole $\varnothing$.

Si l'on souhaite proclamer l'existence d'un ensemble en particulier, la manière la plus simple de le définir est -lorsque cela est possible- d'énumérer tous les éléments qui le composent.
On dresse alors la liste complète des éléments (séparés de points-virgules) en la délimitant d'une paire d'accolades.

☞Exemple : Pour introduire l'ensemble (que l'on choisit de nommer A) possédant les nombres $1, 3, 7$
(et eux seuls), on écrira : $A \overset{\text{déf.}}{=} \left\{1\,;\,3\,;\,7\right\}$.

Quelques principes fondamentaux des ensembles : (et leurs conséquences sur les énumérations)

- L'ordre des éléments dans l'énumération est sans importance.
  Par exemple, on a : $\left\{3\,;\,8\right\} = \{8\,;\,3\}$.
- La répétition d'éléments dans l'énumération ne modifie pas l'ensemble.
  Par exemple, on a : $\left\{3\,;\,8\,;\,8\right\} = \left\{3\,;\,3\,;\,3\,;\,8\right\} = \left\{3\,;\,8\right\}$.

Si un ensemble est vide, ou bien qu'il soit possible de citer tous ses éléments, on dit que l'ensemble est *fini* (l'inventaire établi -aussi long soit il- s'arrête à un moment donné). Dans la situation contraire, on dit que l'ensemble est *infini*.
Ainsi, pour un ensemble fini nommé E, il est possible de compter ses éléments. Le nombre total d'éléments (distincts) cités est alors appelé « *cardinal* de E » et noté $\mathbf{Card}(E)$ (ou parfois : $\#E$). On convient que : $\mathbf{Card}(\varnothing) = 0$.

☞Exemples : On se donne : $B \overset{\text{déf.}}{=} \left\{7\,;\,6\,;\,4\,;\,9\,;\,5\,;\,24\right\}$ et $C \overset{\text{déf.}}{=} \left\{3\,;\,8\,;\,8\right\}$.
Ces ensembles sont .... et on a : $\mathbf{Card}(B) = \ldots$; $\mathbf{Card}(C) = \ldots$.

Dans la situation particulière où un ensemble n'est formé que d'**un seul** élément, on l'appelle *singleton*.
Lorsqu'un ensemble est formé d'**exactement deux** éléments (distincts), il prend le nom de *paire*.

☞Exemples : Les ensembles $\{4{,}9\}$ et $\{0\}$ sont tous deux des .... $\{4\,;\,9\}$ et $\{5\,;\,\text{-}5\}$ sont des ....

Définition et notation : *[relation d'appartenance]*

On se donne un ensemble nommé E. Si a est un élément de E, on dit alors que « a *appartient* à E ».

En écriture mathématique condensée, cette situation s'écrit : $a \in E$
(ou plus rarement -de manière renversée : $E \ni a$). Dans la situation contraire, on peut utiliser le symbole $\notin$.

Exemples : On se donne l'ensemble suivant : $E \overset{\text{déf.}}{=} \{1\,;\,2\,;\,4\}$. Le nombre 4 appartient à E.
On écrit alors : $4 \ \ldots \ E$. En revanche, 3 n'appartient pas à E (ce qui s'écrit : $3 \ \ldots \ E$).

Définition et notation : *[relation d'inclusion]*

On se donne deux ensembles, désignés ici par les lettres A et B.

On dit que « A est *inclus* dans B » si tous les éléments de A sont également des éléments de B.

En écriture mathématique condensée, cette situation se traduit par $A \subset B$ (ou encore : $B \supset A$).
Dans la situation contraire, on peut utiliser le symbole $\not\subset$ (ou $\not\supset$) .

Exemples : On a l'inclusion : $\{2\,;\,5\} \ \ldots \ \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\,;\,8\}$. Par contre : $\{2\,;\,5\} \not\supset \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\,;\,8\}$

.

Si a, b, d et f désignent des éléments distincts, on a : $\{a\,;\,b\,;\,f\,;\,d\} \ \ldots \ \{d\,;\,b\,;\,b\,;\,a\,;\,d\}$.

Remarques : Pour n'importe quels ensembles A et B, on a :

- l'équivalence : $A = B \iff A \subset B$ **et** $A \supset B$ (qui doit se comprendre ainsi : *dire que "deux ensembles sont égaux" revient strictement à dire que "chaque ensemble est inclus dans l'autre"*) ;
- $\boxed{\varnothing \subset A}$ et $\boxed{A \subset A}$ (il est clair que les propriétés demeurent vraies si on remplace A par B).

Définitions et notations : *[opérations $\cap$ et $\cup$ pour les ensembles]*

On se donne deux ensembles, désignés par A et B.

- On appelle « *intersection* de A et de B », **l'ensemble** formé par les éléments appartenant **à la fois** à A et à B.
Cet ensemble se note $A \cap B$ (on le lit :« A inter B »).

- On appelle « *réunion* de A et de B », **l'ensemble** formé par les éléments appartenant **à au moins un des deux** ensembles A et B. Cet ensemble se note $A \cup B$ (on le lit : « A union B »).

Exemple : On se donne : $A \overset{\text{déf.}}{=} \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,7\,;\,3\}$ et $B \overset{\text{déf.}}{=} \{3\,;\,8\,;\,5\,;\,2\,;\,7\}$.
On a alors : $A \cap B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarques : Pour n'importe quels ensembles A et B, on a :

- $\boxed{A \cap B = B \cap A}$ et $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ *[commutativité de $\cap$ et de $\cup$]* ;
- $\boxed{A \cap B \subset A}$ et $\boxed{A \cap B \subset B}$ *[inclusion de l'intersection dans chaque ensemble initial]* ;
- $\boxed{A \subset A \cup B}$ et $\boxed{B \subset A \cup B}$ *[inclusion de chaque ensemble initial dans la réunion]* ;
- $\boxed{A \cap A = A}$ et $\boxed{A \cup A = A}$ *[idempotence de $\cap$ et de $\cup$]* ;
- $\boxed{A \cap \varnothing = \varnothing}$ et $\boxed{A \cup \varnothing = A}$ *[$\varnothing$ est absorbant pour $\cap$ et neutre pour $\cup$]* .

2 Zoologie des nombres

Bien que -du point de vue historique- cela ne compta pas parmi leurs préoccupations premières, les mathématiciens ont ressenti la nécessité de classifier tous les nombres inventés jusqu'alors. Il en a résulté une succession d'ensembles remarquables de nombres. Ces ensembles se trouvent imbriqués : chaque ensemble contenant tous les nombres du précédent et se voyant enrichi de nouveaux nombres plus sophistiqués (et donc plus compliqués à appréhender).

► Tout d'abord, nous avons l'ensemble des « entiers *naturels* » composés de tous les nombres entiers (c'est-à-dire : ayant une partie décimale exclusivement composée de zéros) **et** positif (c'est-à-dire : supérieur ou égal à 0).
Cet ensemble est généré à partir de 0, ainsi que tous les autres nombres obtenus par sommes successives avec 1.
Il s'agit de tout premier type de nombres que l'on aborde à l'école (maternelle). Ils nous servent à compter.
Cet ensemble est infini et se note $\mathbb{N}$. ✌ énumération (inévitablement) partielle : $\mathbb{N} = \{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ldots\ \}$

☞ Exemples : $347\ \ldots\ \mathbb{N}$; $-4\ \ldots\ \mathbb{N}$

► Un nombre est appelé « entier *relatif* » s'il est possible de l'écrire sous la forme $\pm a$, avec a un entier **naturel**.
L'ensemble des *entiers relatifs* est noté $\mathbb{Z}$ (il s'agit de l'initiale du mot "zahl", signifiant "nombre" en allemand).
✌ énumération partielle : $\mathbb{Z} = \{\ \ldots\ ;-3\ ;-2\ ;-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ldots\ \}$

☞ Exemples : $347\ \ldots\ \mathbb{Z}$; $-4\ \ldots\ \mathbb{Z}$; $2{,}1\ \ldots\ \mathbb{Z}$

► Un nombre est qualifié de *décimal* si dans son écriture à virgule - dépourvue de « zéros inutiles » - sa partie décimale est finie (autrement dit : l'énumération de ses décimales successives s'arrête à un moment donné).
Dans ce cours, l'ensemble des *nombres décimaux* sera noté $\mathbb{D}$.

☞ Exemples : $-4\ \ldots\ \mathbb{D}$; $2{,}1\ \ldots\ \mathbb{D}$; $0{,}33\underline{3}\ \ldots\ \mathbb{D}$

► Un nombre est qualifié de *rationnel* s'il est possible de l'écrire sous la forme $\pm\frac{a}{b}$, avec a, b désignant des entiers naturels et b différent de 0.
L'ensemble des *nombres rationnels* est noté $\mathbb{Q}$ (c'est l'initiale du mot « quoziente » - « quotient », en italien).

☞ Exemples : $2{,}1\ \ldots\ \mathbb{Q}$; $0{,}33\underline{3}\ \ldots\ \mathbb{Q}$; $-\frac{7}{8}\ \ldots\ \mathbb{Q}$; $\sqrt{2}\ \ldots\ \mathbb{Q}$

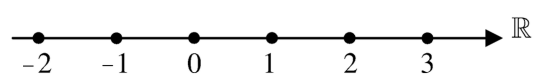
► L'ensemble remarquable le moins vaste mais englobant tous les nombres connus depuis le collège, est celui des *nombres réels*. Il se note $\mathbb{R}$. Un nombre réel qui n'est pas rationnel est qualifié d'*irrationnel*.

☞ Exemples : Tous les nombres mis en jeu dans les exemples précédents sont ....
$\sqrt{2}\ \ldots\ \mathbb{R}$. $\sqrt{2}$ est un nombre ....
Le nombre π est également irrationnel (autrement dit, on a $\pi\ \ldots\ \mathbb{R}$ et $\pi\ \ldots\ \mathbb{Q}$).

⚓ Remarques :

1. On a les inclusions successives : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. On représente de manière graphique l'ensemble $\mathbb{R}$ par une droite graduée appelée « *droite des réels* ».

   Les nombres réels sont disposés dans l'ordre (usuel) sur celle-ci. La flèche indique le sens des nombres croissant.



3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les *intervalles* de $\mathbb{R}$ sont des ensembles (composés de nombres réels) possédant la propriété suivante : chacun d'eux correspond géométriquement à une partie "d'un seul bloc" (comprendre : "sans trou") de la droite des réels.

On s'intéresse plus spécialement aux intervalles de $\mathbb{R}$ possédant une infinité de nombres (autres que $\mathbb{R}$ tout entier). Dans cette situation, ils ne peuvent être que de deux sortes :

- ou bien : ils sont limités dans les deux "sens de parcours" et s'apparentent géométriquement aux ;
- ou bien : ils sont partiellement limités (dans un seul "sens de parcours") et s'apparentent aux .

Les nombres associés aux extrémités ou à l'origine (selon le cas) sont alors appelés .

► Cas des intervalles **limités** : On désigne les deux bornes de l'intervalle par a et b, avec le principe que $a < b$. (a prend alors le statut de « borne inférieure » et b, celui de « borne supérieure » de l'intervalle considéré)

Intervalle défini comme l'ensemble des réels x vérifiant :	Appartenance des bornes à l'intervalle ?	Notation de l'intervalle (avec des crochets)	Représentation graphique (en couleur) de l'intervalle sur la droite des réels
$a \leqslant x \leqslant b$	a comprise et b comprise	$[a;b]$	$\mathbb{R}$ a b
$a < x \leqslant b$	a exclue et b comprise	$]a;b]$	$\mathbb{R}$ a b
$a \leqslant x < b$	a .... et b	....	$\mathbb{R}$ a b
$a < x < b$	a .... et b	....	$\mathbb{R}$ a b

► Cas des intervalles **partiellement limités** : On désigne la seule borne de l'intervalle par c.

Nous devons au préalable introduire deux quantités (infinies) notées $+\infty$ et $-\infty$ qui n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$, mais pour lesquels nous conviendrons de prolonger l'ordre usuel des nombres de la manière suivante : $+\infty$ est plus grand que n'importe quel nombre réel et $-\infty$ est plus petit que n'importe quel nombre réel (ou symboliquement : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x \quad \text{et} \quad x < +\infty$) .

Intervalle défini comme l'ensemble des réels x vérifiant :	Appartenance de la borne à l'intervalle ?	Notation de l'intervalle (avec des crochets)	Représentation graphique (en couleur) de l'intervalle sur la droite des réels
$x \geqslant c$	c comprise	$[c;+\infty[$	$\mathbb{R}$ c
$x > c$	c exclue	....	$\mathbb{R}$ c
$x \leqslant \ldots$	c comprise	$]-\infty;c]$	$\mathbb{R}$ c
x	c exclue	....	$\mathbb{R}$ c

4 Calculs dans $\mathbb{R}$

« Calculer » provient du mot latin « calculus », se traduisant par « caillou » (qu'utilisaient les bergers pour compter leurs troupeaux). En mathématiques, « calculer » signifie plus généralement : manipuler des "symboles" (désignant en particulier des nombres et des opérations) selon des règles -au préalable, rigoureusement précisées. Cette section a pour objectif de résumer la plupart des règles de calculs apprises dans les classes antérieures.

4.1 Opérations élémentaires

Quelques propriétés, définitions et notations en vrac :

- Le résultat d'une addition est appelé *somme*.
  Les nombres (ou expressions) mis en jeux, situés de part et d'autre du symbole + sont appelés *termes*.
  Le résultat d'une multiplication est appelé *produit*.
  Les nombres (ou expressions) mis en jeux, situés de part et d'autre du symbole × sont appelés *facteurs*.
  Le résultat d'une soustraction est appelé *différence*. Le résultat d'une division est appelé *quotient*.

- Si une expression est égale à zéro, elle est qualifiée de *nulle*. Le seul réel à la fois positif et négatif est 0.
  Si une expression est positive **et** non nulle, elle est alors dite « *strictement* positive ».
  Si une expression est négative **et** non nulle, elle est alors dite « *strictement* négative ».

- Deux nombres dont la **somme** est **nulle** sont dits *opposés*.
  Pour tout nombre a réel, il existe un **unique** nombre dont la somme avec a est nulle.
  Il est appelé « l'opposé de a » et il est noté : $\text{-}a$. Ainsi, on a : $\boxed{a + (\text{-}a) = 0}$.
  Deux nombres dont le **produit** est **égal à** 1 sont dits *inverses*.
  Pour tout nombre a réel **non nul**, il existe un **unique** nombre dont le produit avec a est égal à 1.
  Il est appelé « l'inverse de a » et il est noté : $\frac{1}{a}$. Ainsi, on a : $\boxed{a \times \frac{1}{a} = 1}$.

- À n'importe quel nombre réel a, le soustraire par un réel b **revient à** lui ajouter l'opposé de b.
  Ainsi, on a : $\boxed{a - b = a + (\text{-}b)}$.
  À n'importe quel nombre réel a, le diviser par un réel (non nul) b **revient à** le multiplier par l'inverse de b. Ainsi, on a : $\boxed{a \div b = a \times (\frac{1}{b})}$.

Attention! Deux symboles -parmi "+", "−", "×" et "÷"- ne peuvent jamais être directement placés l'un à côté de l'autre. On aura alors parfois recours aux parenthèses.
Ainsi, pour le produit de 5 par -6, on écrira : "$5 \times (\text{-}6)$" (et non : "5 × -6").

Attention! Le symbole « moins » a un emploi double : le "−" (allongé) désigne l'opération de soustraction, tandis que le "-" (court) fait référence à la notion d'opposé d'un nombre.
Ces deux notions sont fortement liées l'une à l'autre (en effet, on a toujours : $\text{-}a = 0 - a$)
mais la distinction est -à certaines occasions- importante à saisir et effectuer.
Notamment, sur la plupart des calculatrices, la commande "$5 + (-4)$" renverra un message d'erreur, tandis que l'expression saisie "$5 + (\text{-}4)$" sera traitée par la machine.

⚓ Remarques : L'opposé de l'opposé d'un nombre est égal à lui-même (ainsi : $\boxed{-(-a) = a}$).
L'inverse de l'inverse d'un nombre (non nul) est égal à lui-même (ainsi : $\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a}} = a}$).

Propriétés fondamentales de l'addition et la multiplication :

$\forall a,b,c,k \in \mathbb{R}$: ✌comprendre ici : pour n'importe quels nombres réels désignés par les lettres a, b, c et k

$a+b = b+a$; $a \times b = b \times a$; *[commutativité de + et de ×]*

$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$; $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;
[associativité de + et de ×]

$0+a = a$; $1 \times a = a$; *[0 est l'élément neutre pour + et 1 est l'élément neutre pour ×]*

$0 \times a = 0$; *[0 est l'élément absorbant pour ×]*

($a \times b = 0 \implies a = 0$ **ou** $b = 0$) ; *[intégrité de $\mathbb{R}$]*

$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$. *[distributivité de × sur +]*

⚓ Remarque : D'autres formules liées à la distributivité ont été établies au collège :
$\boxed{k \times (a-b) = k \times a - k \times b}$
et $\boxed{(k+l) \times (a+b) = k \times a + k \times b + l \times a + l \times b}$ *[double distributivité]*.
✌Elles s'obtiennent à partir de celle placée dans le grand cadre. On peut se contenter de ne retenir que celle-ci.

4.2 Écritures fractionnaires

Beaucoup de problèmes se ramènent à un **partage équitable** d'une quantité. L'opération associée est la division.
L'écriture décimale ne convient alors pas toujours pour exprimer le résultat (notamment s'il s'agit de développements décimaux illimités non réductibles -à exploiter dans des calculs à venir).
C'est en réponse à ces difficultés que les écritures fractionnaires ont été adoptées.

Notation et définitions : On se donne deux nombres réels a et b, avec b non nul.
On note "$\frac{a}{b}$", le nombre réel dont le produit avec b est égal à a
(écrit mathématiquement : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 : \quad b \times \frac{a}{b} \overset{\text{déf.}}{=} a$.).

- Les écritures du type " $\frac{a}{b}$ " sont appelées « *écritures fractionnaires* ». L'écriture $\frac{a}{b}$ peut se lire « a sur b ».
- Le trait "—" séparant les nombres a et b est appelé « *barre* de l'écriture fractionnaire ».
- Le nombre a situé au-dessus cette barre est appelé *numérateur*.
- Le nombre b placé en dessous de celle-ci est appelé *dénominateur*.

☞Exemples : Le réel $\frac{7}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, vaut 7. En termes d'égalité : $\ldots \times \frac{7}{3} = \ldots$.
Le réel $\frac{4}{11}$ est .... En termes d'égalité : $4 \times \frac{\cdots}{\cdots} = 11$.

⚓ Remarques :

1. Les écritures fractionnaires peuvent s'interpréter comme des quotients (ainsi : $\boxed{\frac{a}{b} = a \div b}$).

   Ainsi : $\frac{11}{4}$ n'est autre que le nombre ... ; l'entier ... peut "se déguiser" sous forme fractionnaire en $\frac{35}{7}$.

2. Pour construire l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ à partir de celui des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on s'appuie sur :

Définition : *[relation fondamentale d'égalité entre écritures fractionnaires]*

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z},\quad b \neq 0,\quad d \neq 0 : \qquad \frac{a}{b} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad a \times d = b \times c \quad .$$

" *l'égalité des produits en croix est vérifiée* "

a) Précisons que la propriété demeure vraie si on remplace dans l'encadré " $\mathbb{Z}$" par " $\mathbb{R}$".

b) En dehors de l'intêret théorique qu'elle présente, cette propriété s'avére utile pour tester "à la main" si deux quotients donnés sont égaux.

   Par exemple, les quotients (représentés par les écritures fractionnaires) $\frac{13}{67}$ et $\frac{338}{1742}$ le sont, dans la mesure où l'égalité des produits en croix est vérifiée : on a bien $13 \times 1742 = 67 \times 338 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

   En revanche, les quotients respectivement associés à $\frac{13}{67}$ et $\frac{3379999999}{17420000000}$ ont des valeurs différentes, et ce, contrairement à ce que la plupart des calculatrices nous suggèrent (affichant pour ces deux là -au maximum de leurs capacités : " 0.19402985 "). En effet, l'égalité des produits en croix n'est pas vérifiée : $\ldots \times 17420000000 \neq \ldots \times 3379999999$ ✌Aisément vérifiable, en se concentrant sur le chiffre des unités.

✌Cas simples fréquemment rencontrés : $\boxed{\frac{a}{1} = a}$; pour $a \neq 0$, on a : $\boxed{\frac{0}{a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{a} = 1}$.

Attention! Les écritures du type " $\frac{a}{0}$" (comme $\frac{3}{0}$ et $\frac{-7}{0}$) n'ont aucun sens (le dénominateur doit être non nul).

Propriété : (dite « **des quotients égaux** »)

$$\forall a,b,k \in \mathbb{R},\quad b \neq 0,\ k \neq 0 : \qquad \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \quad .$$

☞Exemple : Les écritures fractionnaires " $\frac{10}{2}$" et " $\frac{70}{14}$" (= $\frac{10\times7}{2\times7}$) représentent exactement le même nombre.

De la propriété des quotients égaux, découle directement le fait suivant : pour une écriture fractionnaire donnée, il existe une infinité d'écritures de même type qui lui sont égales. Face à cette profusion, les mathématiciens ont convenus de donner leurs résultats sous la forme -à la fois simple et **unique**- de *fractions irréductibles* :

Définitions et notation :

On dit qu'une écriture fractionnaire est une *fraction* si ses numérateur et dénominateur sont **entiers**.
Une fraction est qualifiée d'*irréductible* si le pgcd (« Plus Grand Diviseur Commun ») du numérateur et du dénominateur est égal à 1. ✌autrement dit : si les numérateur et dénominateur -décomposés en produit de nombres **tous premiers**- ne possèdent aucun facteurs communs.

☞ Exemples :

$\frac{28}{70}$ est une fraction mais elle n'est pas irréductible. Par contre, $\frac{...}{...}$ est la fraction irréductible qui lui est égale.

$\frac{33}{92}$ est une fraction irréductible (en effet, $33 (= 3 \times 11)$ et $92 (= 2 \times 2 \times 23)$ n'ont pas de facteur en commun).

$\frac{1,8}{2,4}$ n'est pas une fraction, par contre $\frac{...}{...}$ en est une qui lui est égale et $\frac{...}{...}$ est sa fraction irréductible associée.

Point technique sur les pourcentages :

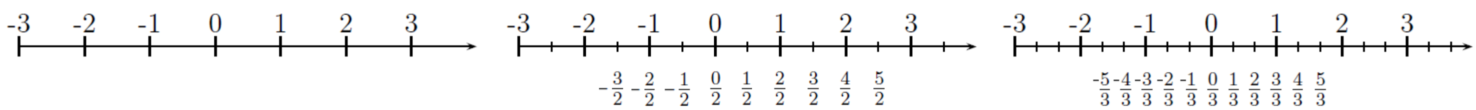
Il s'agit de réécrire un nombre sous la forme fractionnaire ayant **100** comme **dénominateur imposé**.

☞ Par exemple : $\frac{7}{10} \overset{\text{pourcent.}}{=} \frac{...}{100}$; $\frac{3}{4} \overset{\text{pourcent.}}{=} \frac{...}{100}$; $0,285 = \frac{0,285}{1} \overset{\text{pourcent.}}{=} \frac{...}{100}$

Certains écrivent (pour des raisons essentiellement esthétiques) horizontalement $a\%$ au lieu de $\frac{a}{100}$.

☞ Écrivons sous cette forme, les nombres précédemment utilisés : 70% ; ...... ; ......

Représentation graphique de fraction sur la droite des réels : *(les deux derniers schémas sont à compléter)*



les entiers de [-3; 4[*les fractions en demi de* [-3; 4[*les fractions en tiers de* [-3; 4[

Il est -en principe- possible de représenter n'importe quelle fraction sur un axe (de dimension convenable). Par exemple, pour les fractions en septième : il suffit de **partager l'unité de longueur** (observable par l'écart des points où sont associés 0 et 1 - mais on aurait pu tout aussi bien prendre 1 et 2 !) **en sept parts égales**, puis de sous-graduer l'axe en reportant la longueur obtenue, à partir de l'origine, et, de part et d'autre de celui-ci.

Propriétés : *[opérations élémentaires et écritures fractionnaires]*

$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 : \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad ; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0 : \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad ; \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

☞ Exemples : $\frac{2}{17} + \frac{9}{17} = \frac{...}{...}$; $\frac{18}{23} - \frac{15}{23} = \frac{...}{...}$; $\frac{5}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{...}{...}$; $\frac{5}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{...}{...}$

Méthode : **Calcul de la somme(/différence) de deux écritures fractionnaires aux dénominateurs mixtes**

Par la propriété des quotients égaux, transformer au moins l'une d'elles pour ainsi obtenir deux écritures fractionnaires de même dénominateur.

☞ Exemples : $\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{... \times 3}{5 \times 3} + \frac{... \times 5}{3 \times 5} = \frac{...}{15} + \frac{...}{15} = \frac{...}{...}$; $\frac{9}{7} - \frac{11}{28} = \frac{... \times 4}{7 \times 4} - \frac{11}{28} = \frac{...}{28} - \frac{...}{28} = \frac{...}{...}$

Pour comparer deux nombres en écritures fractionnaires, on s'inscrira dans une démarche similaire : prendre les dispositions suffisantes pour les réécrire avec des **dénominateurs égaux** (✌ de sorte à ce qu'elles "luttent" à "armes égales") ; elles seront départagées **en comparant uniquement les numérateurs**.

4.3 Écritures des puissances d'un nombre

Définitions et notation :

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 : a^n \overset{\text{déf.}}{=} \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$. *[puissances avec des exposants entiers strictement positifs]*

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ a \neq 0, n \neq 0 : \quad a^{-n} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{a^n}$. *[puissances avec des exposants entiers strictement négatifs]*

$\forall a \in \mathbb{R} : \ a^1 \overset{\text{déf.}}{=} a$. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : \ a^0 \overset{\text{déf.}}{=} 1$. *[conventions pour les puissances d'exposant* 1 *ou* 0*]*

- Les écritures du type "a^n" sont appelées « *puissances* de a ». Le nombre a est appelé *base*.
- Le nombre écrit en indice supérieur (désigné ici par n) est appelé *exposant*.
- L'écriture a^n se lit : « a - exposant n ».

Exemples : 7^4 est une puissance de ... . Dans cette même écriture, l'exposant est ... et la base est ... .

$7^4 = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7}_{4 \text{ facteurs égaux à } 7} = \ldots\ldots\ldots$; $4^7 = \underbrace{4 \times \cdots \times 4}_{7 \text{ facteurs égaux à } 4} = \ldots\ldots\ldots$;

$4^1 = \ldots$; $4^0 = \ldots$; $4^{-7} = \frac{1}{4^{\cdots}} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Exceptions de la langue française : pour $n = 2$, on préfèrera dire « au *carré* », plutôt que "exposant 2" ; pour $n = 3$, il est d'usage d'employer « au *cube* » .

Attention! Les mathématiciens n'ont pas trouvé d'accord unanime quant au sens à donner à "0^0". On se gardera donc bien de l'écrire.

Convention : En l'absence de parenthèses, on convient que le carré ne porte que sur la distance à zéro du réel qui le précède directement. Ainsi $(-5)^2$ $(= (-5) \times (-5) = 25)$ se distingue de -5^2 $(= -(5 \times 5) = -25)$.

Attention! Les "tours (de Pise!) d'exponentiations" nécessitent en principe des parenthèses : l'écriture "2^{3^3}" serait problématique, car ambigüe : $(2^3)^3$ $(= 8^3 = 512)$ n'exprime pas le même calcul que $2^{(3^3)}$ $(= 2^{27} = 134217728)$.

Propriétés : *[produits et quotients pour les puissances* ***de même base*** *]*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall m,n \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 : \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \ ; \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ ; \ (a^m)^n = a^{m \times n}.$$

Exemples : $2^5 \times 2^3 = 2^{\cdots+\cdots} = 2^{\cdots}$; $\frac{7^2}{7^6} = 7^{\cdots-\cdots} = 7^{\cdots}$; $(11^2)^3 = 11^{\cdots\times\cdots} = 11^{\cdots}$

Remarques :

1. Il existe également des formules remarquables pour les produits et quotients de puissances **de même exposant**. Ainsi, on a (sous les mêmes hypothèses que précédemment) : $\boxed{a^n \times b^n = (a \times b)^n}$; $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$.
2. Il **n'**existe **pas** de règles similaires pour les **sommes et différences** de puissances de même nombre.

4.4 Écritures avec radicaux

Propriété, définition et notation :

Étant donné un nombre réel **positif** a, il existe un unique nombre réel **positif** dont le carré est égal à a.

Ce nombre est appelé « *racine carrée* de a » et il est noté : $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{}$ est appelé *radical*.
Le nombre (ou expression) abrité(e) sous un symbole radical est alors appelé(e) *radicande*.

Exemples : Par définition, $\sqrt{5}$ est le ....
Par définition, $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré vaut 9. (vous avez sans doute reconnu ici, le nombre ... déguisé)

Attention! Les écritures de type "$\sqrt{a}$" avec a strictement négatif (comme $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-3}$) n'ont aucun sens.

Remarques : *[effets quasi-compensatoires d'une racine carrée sur un carré - et inversement]*

Pour tout réel **positif** x, on a : $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \boxed{(\sqrt{x})^2 = x}$. Pour tout réel x : $\boxed{\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$.

Propriétés :

$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 : \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}.$ "le produit de racines est égale à la racine du produit"

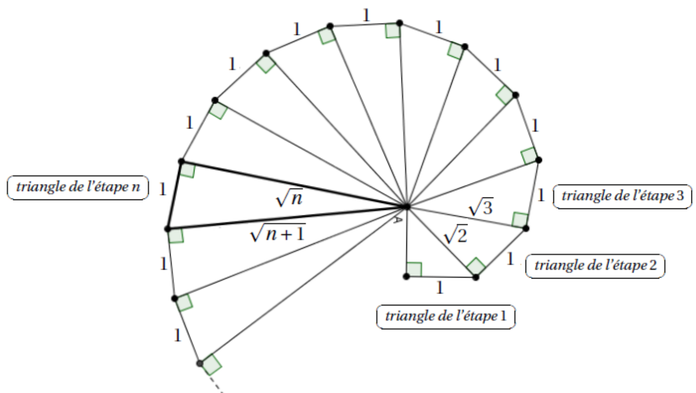
$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a \geqslant 0,\ b > 0 : \quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}.$ "le quotient de racines est égale à la racine du quotient"

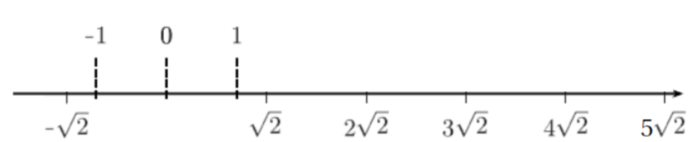
Exemples : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{\ldots \times \ldots} = \sqrt{\ldots \times \ldots} = \ldots$; $\sqrt{\dfrac{81}{49}} = \dfrac{\sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots}} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$;
$\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{2{,}5}} = \sqrt{\dfrac{\ldots}{\ldots}} = \sqrt{\ldots \times \ldots} = \ldots$

Remarques :

1. Il **n'**existe **pas** de règles analogues concernant les **sommes et différences** de racines carrées.
2. On peut assimiler une racine carrée à une puissance d'exposant un demi (par exemple : $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$).

« Escargot de Pythagore » : *[construction géométrique de racines carrées à radicandes entiers à partir d'une unité de longueur fixée]*





4.5 Priorités opératoires dans une expression

La lecture d'une expression décrivant un enchaînement d'opérations peut poser problème (d'autant plus lorsqu'on ne connait pas les intentions de son auteur) . En effet : l'expression "$3+4\times 5$" pourrait s'interpréter de deux manières différentes (selon que l'on commence par effectuer l'addition ou la multiplication).
Pour se parer contre de tels désagréments, les mathématiciens ont convenu d'établir les règles suivantes :

Conventions : *[priorités calculatoires dans une expression]*

1. Les calculs placés entre parenthèses sont prioritaires sur ceux qui en sont dépourvus ;
2. **À niveau égal de parenthésage**, les calculs de multiplications (et de divisions) sont prioritaires sur ceux des additions (et soustractions).

☞Exemples : $3+\underbrace{4\times 5}_{\text{priorité !}} = \ldots + \ldots = \ldots$; $\underbrace{(3+4)}_{\text{priorité !}}\times 5 = \ldots \times \ldots = \ldots$

Remarques :

1. Parmi les règles rappelées, manquent à l'appel celles s'appliquant aux situations suivantes :
   - l'expression ne présente **aucune parenthèse** et ne comprend **que des symboles** opératoires $+$ **et** $-$ (parfois appelée « somme *algébrique* ») ;
   - l'expression ne présente **aucune parenthèse** et ne comprend **que des symboles** opératoires $\times$ **et** $\div$.

   On peut très classiquement effectuer les calculs dans le sens de la lecture. Cependant, ces expressions peuvent être traitées en utilisant les propriétés d'associativité et de commutativité des addition et multiplication.

   Cette deuxième option peut s'avérer particulièrement stratégique en calcul non instrumenté. ☞ Par exemple :

   - $13-25+32-64-86 \overset{\text{reformul.}}{=} 13+(\text{-}25)+32+(\text{-}64)+(\text{-}86) \overset{\text{commut.}}{=} 13+32+(\text{-}25)+(\text{-}64)+(\text{-}86)$
     $\overset{\text{assoc.}}{=} \big(13+32\big)+\big((\text{-}25)+(\text{-}64)+(\text{-}86)\big) = \ldots + (\ldots) = \ldots$;
   - $7\div 3\times 6 \overset{\text{reformul.}}{=} 7\times\frac{1}{3}\times 6 \overset{\text{commut.}}{=} 7\times 6\times\frac{1}{3} \overset{\text{assoc.}}{=} \big(7\times 6\big)\times\frac{1}{3} = \frac{7\times 6}{3} = \ldots$

2. Dans le but de rendre plus lisibles certaines expressions, on peut avoir recours à des couples de crochets ("[" et "] ") et même d'accolades ("{ " et "} ") qui tiendront exactement le même rôle que celui des parenthèses.

   ☞Prenons l'exemple de l'expression "$2\times((3+2\times(5-8))\div 3)$". Elle possède des parenthèses imbriquées et pourrait mieux se comprendre en l'écrivant ainsi : $2\times\{[3+2\times(5-8)]\div 3\}$.

Méthode : **Pour décrire une expression**
(c'est-à-dire : déterminer s'il s'agit d'une somme, d'une différence, d'un produit ou bien d'un quotient),
il faut tout d'abord repérer la **dernière** opération qui sera effectuée (compte tenu des priorités opératoires !).

Ainsi : "$3+2\times 5$" est **une** .... (plus exactement, il s'agit de **la** somme **de** 3 **et du** *produit de* 2 *et de* 5).
"$(3+2)\times 5$" est **un** .... (plus exactement : **le** ....).

Attention ! Lorsque l'on passe d'une écriture fractionnaire (verticale) à une écriture en ligne (horizontale), il faut penser à mettre entre parenthèses les expressions respectivement placées au numérateur et au dénominateur.

☞Par exemple : $\frac{42-12}{2\times 7{,}5} \overset{\text{reformul.}}{=} \big(42-12\big)\div\big(\ldots\ldots\ldots\big) = \ldots\div\ldots = \ldots$

5 Calcul littéral dans $\mathbb{R}$

Dans ces rappels, nous nous sommes jusqu'alors consacrés aux *expressions numériques* (c'est-à-dire : des "phrases mathématiques" composées de nombre(s), de symbole(s) opératoire(s) et de parenthèses disposés selon une syntaxe valide permettant leur compréhension).
Nous allons désormais nous intéresser aux *expressions littérales* qui -en plus des possibilités de variétés offertes aux expressions numériques- autorisent l'apparition de symbole(s) (généralement des **lettres** -d'où le qualificatif "littéral") **désignant des nombres pour lesquels on ne précise pas momentanément leurs valeurs** (pour diverses raisons).

Parmi ces lettres introduites dans les expressions, on distingue (selon leur rôle) :
- les *constantes*, qui désignent un nombre fixé (par exemple π, ou encore e -vu en terminale) ;
- les *variables*, qui désignent un nombre pour lequel on n'a pas encore fixé de valeur (on en a généralement besoin pour définir des fonctions ou exprimer une propriété générale).

☞Exemples : "$17\times x+y$" est une expression littérale (où interviennent deux lettres x et y).
Elle vaut … pour $x=1$ et $y=4$. Elle est égale à … pour $x=-1$ et $y=10$.

"$17\times23+76$" est une expression numérique (qui peut être aussi vue comme une littérale sans intervention de lettres).

Les combinaisons de caractères "4 + ×5" et "4−)(5(÷2" ne sont pas des expressions (car elles n'ont aucun sens).

On entend par « calcul littéral dans $\mathbb{R}$ », l'ensemble des techniques amenant la transformation d'une expression littérale donnée en une autre **qui lui est égale pour n'importe quelle(s) valeur(s) réelle(s)** attribuée(s) à chacune des variables.

5.1 Simplification d'une expression littérale

Il existe en fait très peu de règles nouvelles dédiées au calcul littéral, dans la mesure où toutes celles vues à la section précédente sont également applicables aux expressions littérales.
En voici cependant une, facilitant la lecture (de par la limitation des caractères mis en jeu).

> **Convention** : *[suppression d'un symbole "×" sans perte du sens de l'expression littérale initiale]*
>
> On supprime chaque symbole de multiplication placé **devant** une lettre, une parenthèse ou un symbole radical.

☞Exemples : $8\times x-9 \overset{\text{suppr.}}{=} \ldots\ldots\ldots$; $2\times(7\times y+5) \overset{\text{suppr.}}{=} \ldots\ldots\ldots$; $9\times\sqrt{\frac{1}{4-3\times z}} \overset{\text{suppr.}}{=} \ldots\ldots\ldots$

⚓ Remarques :

1. Pour obtenir une écriture davantage simplifiée, on pourra combiner cette règle de suppression aux propriétés sur les réels (déja citées). Ainsi (cas fréquemment rencontrés) : $x\times3 \overset{\text{commut.}}{=} 3\times x \overset{\text{suppr.}}{=} \ldots\ldots\ldots$;
$7\times x\times4\times y \overset{\text{commut. et assoc.}}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{\text{simpl.}}{=} \ldots\ldots\ldots$; $4\times z\times z \overset{\text{simpl.}}{=} \ldots\ldots\ldots$
2. *[Cas particuliers]* Pour tout x réel, on a $\boxed{0\times x \overset{\text{suppr.}}{=} 0x \overset{\text{simpl.}}{=} 0}$ et $\boxed{1\times x \overset{\text{suppr.}}{=} 1x \overset{\text{simpl.}}{=} x}$.
3. On peut bien évidemment rétablir le symbole.
4. "$+(-x)$" et "$-(+x)$" se simplifient en "$-x$" ; mais aussi : "$+(+x)$" et "$-(-x)$" se simplifient en "$+x$".

✌ *Pour la retenir, penser à la « règle des signes ».*

Attention! *[erreurs fréquentes]*

1. L'expression "$x \times 6 - 4$" est égale à "$6x - 4$" et non à "$2x$" (l'opération prioritaire étant ici la multiplication).
2. La quantité "$-a$" n'est pas toujours négative. En effet, pour $a = -2$, on a : $-a = -(-2) = 2 > 0$.

Nous allons maintenant exposer les "transformations" que l'on réalise classiquement sur les expressions littérales.

5.2 Développement et factorisation

On reprend la propriété de distributivité pour laquelle on distingue désormais deux sens, selon la forme considérée comme initiale (ou finale).
Transformer une expression dans le sens ① se dit : *développer*.
Transformer une expression dans le sens ② se dit : *factoriser*.

sens ① : *développement*

$$k \times (a+b) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{=}} k \times a + k \times b$$

sens ② : *factorisation*

Exemples : $z \times (4y+3) \overset{\text{dév.}}{=} z \times \ldots + z \times \ldots \overset{\text{simpl.}}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots$;
$t \times (7t-5) \overset{\text{dév.}}{=} \ldots \times \ldots + \ldots \times (-\ldots) \overset{\text{simpl.}}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarques :

1. Généralement : - on développe dans le but de transformer une somme en un produit ;
   - on factorise dans l'idée de transformer un produit en une somme.
2. Selon le contexte, le passage d'une des deux formes à l'autre pourra s'avérer utile dans la résolution d'un problème. Par exemple, une forme factorisée pertinemment choisie permet généralement de déterminer le signe d'une expression.

5.3 Réduction d'une somme algébrique littérale

« *Réduire* » une somme signifie : écrire une autre somme **qui lui est égale** et qui possède moins de termes.

Méthode : **Pour une réduction optimale d'une somme sans parenthèses**

- On simplifie au préalable les termes de cette somme.
- On identifie/inventorie les "types d'espèces" de termes apparaissant dans celle-ci, sur le principe que :
  - un « terme sans variable » et « un terme avec variable » sont d'espèces différentes ;
  - un « terme en x » est d'espèce différente d'un « terme en x^2 » ;
  - un « terme en x » est d'espèce différente d'un « terme en y », tous deux différents d'un « terme en xy ».
- On regroupe les termes de "même espèce" (actions validées par les propriétés de commutativité et associativité de +).
- On calcule -pour chaque groupe de termes- la somme algébrique des coefficients (action justifiée par la propriété de distributivité). Dans le cas particulier où la somme des coefficients est nulle, on fera disparaître tous les termes associés au groupe de l'expression littérale.

Exemples : $7x+9-3x+17 \overset{\text{commut. et assoc.}}{=} (7x-3x)+(9+17) \overset{\text{factor.}}{=} (7-3)x+(9+17) \overset{\text{réd.}}{=} 4x+26$;
$5y^2-6y-11y^2+4 \overset{\text{commut. et assoc.}}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overset{\text{factor.}}{=}$ .... $\overset{\text{réd.}}{=}$ .... ;

$8a-9b+5ab-3a+11b-4ab \overset{\text{commut. et assoc.}}{=}$ ....
$\overset{\text{factor.}}{=}$ .... $\overset{\text{réd.}}{=}$ ....

⚓ Remarques :

1. De par la commutativité de $\times$, les termes "en ab" et ceux "en ba" sont considérés de même espèce (et devront ainsi être regroupés pour une réduction optimale).
2. Une réduction optimale admet généralement plusieurs "bonnes réponses".
   Supposons que vous ayez trouvé l'une d'entre elles : $\underbrace{+7x^2}\underbrace{-3x}\underbrace{-64}$.
   Dans la mesure où l'on peut présenter l'expression sous la forme $(7x^2)+(-3x)+(-64)$ et en présence de la propriété commutativité de $+$, on peut générer toutes les autres possibilités de "réponses justes", en permutant (✌ syn. : changeant de place) les "blocs" (qui doivent être laissés intacts -signe compris!)

Dernier point technique :

Méthode : **Éclatements de parenthèses dans certaines situations**
Il est possible de rencontrer dans des expressions littérales des sous-expressions parmi les types $(*)$, $+(*)$ et $-(*)$ où $*$ désigne une somme.
Pour les deux premiers cas, le symbole et les parenthèses peuvent être enlevées sans aucune contrepartie.
Pour le dernier cas : ils peuvent également être enlevés, moyennant toutefois le **passage de chaque terme** composant $*$ **en son opposé**.

☞ Exemples : $21s-19t+(5s-35t-7) =$ .... $\overset{\text{réd.}}{=}$ .... ;

$21s-19t-(5s-35t-7) = 21s-19t-5s+35t+7 \overset{\text{réd.}}{=}$ ....

5.4 Compléments : identités remarquables

Propriétés : *[identités remarquables]*

$\forall a,b \in \mathbb{R}$: ① $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; ② $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; ③ $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

☞ Exemples :

$(x+7)^2 \overset{\text{id. rem. ①}}{=} \ldots^2+2\times\ldots\times\ldots+\ldots^2 \overset{\text{simpl.}}{=}$ .... ;

$(3y-5)^2 \overset{\text{id. rem. ②}}{=} (\ldots)^2-2\times\ldots\times\ldots+\quad{}^2 \overset{\text{simpl.}}{=}$ .... ;

$(4z+9)(4z-9) \overset{\text{id. rem. ③}}{=} (\ldots)^2-\ldots^2 \overset{\text{simpl.}}{=}$ ....

⚓ Remarque : La maîtrise de ces identités permettent :
- d'accélérer certains calculs littéraux (de même que la connaissance des tables de multiplication facilitent les calculs des produits et quotients) ;
- d'aider à factoriser certaines expressions.

☞ **Applications en calcul mental :** *[à réaliser dans son cahier pour s'en convaincre]*
En présentant les expressions 15^2 , 99^2 et 23×17 respectivement sous les formes $(10+5)^2$, $(100-1)^2$ et $(20+3)(20-3)$, puis en utilisant une des identités remarquables, on peut facilement calculer de tête leurs résultats.

6 Égalités et inégalités dans $\mathbb{R}$

6.1 Égalité entre deux expressions littérales

Deux égalités sont dites *équivalentes* si elles possèdent la même valeur de vérité (autrement dit : pour n'importe quelle(s) valeur(s) attribuée(s) à la (aux) variable(s), les égalités sont simultanément vraies ou simultanément fausses).

⚓ Remarque : On a : $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad (a = b \iff a - b = 0)$.

Propriétés : *[des égalités équivalentes]*

On se donne une égalité de deux expressions littérales.
Par l'un des procédés ci-dessous :

- ajouter (ou bien retrancher) à **chaque membre** une même quantité (réelle) ;
- multiplier (ou bien diviser) **chaque membre** par une même quantité (réelle) **non nulle**.

l'égalité obtenue est équivalente à celle de départ.

Plus formellement, ces propriétés s'écrivent :

- $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad (\forall c \in \mathbb{R} : \quad a = b \iff a + c = b + c)$
- $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad (\forall c \in \mathbb{R}, c \neq 0 : \quad a = b \iff a \times c = b \times c)$

⚓ Remarque : Nous disposons également des équivalences suivantes :

- $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad (a = b \iff -a = -b)$ *[✌ "passage aux opposés"]*
- $\forall a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 : \quad (a = b \iff \frac{1}{a} = \frac{1}{b})$ *[✌ "passage aux inverses"]*

☞Exemples : $\frac{x}{7} - 3 = 18 \iff \frac{x}{7} = \ldots$ *(on a ajouté 3 à chaque membre de l'égalité)*
$\iff x = \ldots$ *(on a multiplié* ....

$3x = 5x + 28 \iff \ldots = 28$ *(on a retranché $5x$ à chaque membre de l'égalité)*
$\iff x = \ldots$ *(on a divisé* ....

6.2 Inégalité de deux expressions littérales

Comme leur nom l'indique, les inégalités traduisent des situations où deux quantités ne sont pas strictement égales. Pour les exprimer, on aura recours :
- aux symboles *de comparaison* tels que $<$ (lu dans le sens usuel : « inférieur à »), $\leqslant$ (« inférieur ou égal à »), $>$ (« supérieur à ») et $\geqslant$ (« supérieur ou égal à ») ;
- au symbole *de différenciation* : $\neq$ (« différent de ») .

Une inégalité contenant un symbole de comparaison parmi "$>$" et "$<$", est qualifiée de *stricte*.
Toutes celles faisant apparaître un "$\geqslant$" ou un "$\leqslant$", sont dites *larges*.

On mettra provisoirement de côté le symbole de différence - qui peut être exprimé à partir d'autres.
En effet : l'énoncé "$a \neq b$" est équivalent à "$a > b$ **ou** $a < b$".

⚓ Remarques :

1. L'énoncé "$7 \leqslant 7$" est vrai. Par contre, l'affirmation "$7 < 7$" est fausse.
2. Comparer deux quantités revient à déterminer le signe de leur différence. On dispose en effet des équivalences suivantes : $a > b \iff a - b > 0$; $a < b \iff a - b \ldots 0$;
   $a \geqslant b \iff a - b \geqslant 0$; $a \leqslant b \iff a - b \ldots 0$.
3. Toujours sur le plan de la logique : l'exact contraire de l'énoncé "$a < b$" est "$a \geqslant b$" .
   ✌le contraire d'une inégalité stricte s'exprime par une inégalité large - et inversement.

Propriétés : *[des inégalités équivalentes]*

On se donne une inégalité de deux expressions littérales.
Par l'un des procédés ci-dessous :

- ajouter (ou bien retrancher) à **chaque membre** une même quantité (réelle) ;
- multiplier (ou bien diviser) **chaque membre** par une même quantité (réelle) **strictement positive**.

l'inégalité obtenue est équivalente à celle de départ.

☞Exemple : On a : $7x + 4 < 4x + 88 \iff 3x + 4 < 88 \iff 3x < 84 \iff x < 28$.

⚓ Remarque : Il est également possible de multiplier(/diviser) par une même quantité strictement **négative** à condition d'en même temps « *renverser* l'inégalité » c'est-à-dire :
- **ou bien** interchanger de place les membres de l'inégalité : le membre de gauche vient à droite - et inversement;
- **ou bien** remplacer le symbole de comparaison : "$\geqslant$" par "$\leqslant$", "$>$" par "$<$" - ou inversement.

6.3 Équations et inéquations

On se place dans le cadre suivant :
- on se donne une (in/)égalité dans laquelle interviennent une ou plusieurs variables;
- le but est de trouver toutes les valeurs possibles que l'on peut attribuer simultanément à ces variables de sorte à ce que l'(in/)égalité soit vraie.

Vocabulaire spécifique à ce cadre :

- L'égalité prend alors le statut d'*équation*. S'il s'agit d'une inégalité, elle est appelée *inéquation*.
- Les expressions situées de part et d'autre du symbole de comparaison sont appelées *membres*.
  Pour les distinguer, on peut les désigner par « membre *de gauche* » et « membre *de droite* »
  -ou encore : « *premier* membre » et « *second* membre ».
- Chaque variable intervenant dans l'(in/)équation est appelée *inconnue*.
- Chaque situation possible est appelée *solution*.
- Pour un ensemble E précisé, « *résoudre* l'(in/)équation **dans** E » signifie :
  trouver **toutes** les solutions de l'équation appartenant à E.
- L'ensemble des solutions d'une équation est généralement désigné par S.

⚓ Remarque importante : Si deux égalités (vues en tant qu'équations) sont équivalentes, alors elles admettent exactement les mêmes solutions.

Abordons dans un premier temps les types-d'(in/)équations-les-plus-simples-au-monde .

L'équation "$x = 4$" admet une unique solution, qui est 4 (autrement dit : l'ensemble des solutions est $S = \{4\}$).
L'inéquation "$y > 7$" admet une infinité de solutions : $S = \,]7;+\infty[$.
L'inéquation "$z \geqslant 9$" admet une infinité de solutions : $S = \dots\dots\dots$.
L'inéquation "$t < 3$" admet une infinité de solutions : $S = \dots\dots\dots$.

L'idée générale pour résoudre une (in/)équation est **de se ramener à** un des "types-d'(in/)équations-les-plus -simples-au-monde", par équivalences successives, au moyen de calculs littéraux sur chacun des membres, ou encore, à une autre forme d'équation connue.

Inventaires des types d'(in/)équations déjà étudiées au collège :

- **Équation ou inéquation « du premier degré » (de la forme $ax + b \natural cx + d$ où x désigne l'inconnue, $\natural$ appartient à $\{=, <, >, \leqslant, \geqslant\}$ et les autres lettres sont des réels fixés - avec a et c non tous les deux nuls)**

  ☞Exemples : On se donne $(\mathscr{E}_1) : \frac{x}{7} - 3 = 18$, $(\mathscr{E}_2) : 3x = 5x + 28$ et $(\mathscr{E}_3) : 7x + 4 < 4x + 88$.

  D'après les travaux menés à l'occasion de précédents exemples :
  $(\mathscr{E}_1) \iff x = 147$. On conclut alors que $(\mathscr{E}_1)$ possède une solution unique, qui est 147 ($S_1 = \{147\}$).
  $(\mathscr{E}_2) \iff x \dots\dots$ On conclut alors que ....
  $(\mathscr{E}_3) \iff x \dots\dots$ On conclut alors que ....

- **Équation « produit nul »**

  On utilise la propriété d'intégrité des nombres réels (✌pour rappel : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \times b = 0 \iff a = 0$ **ou** $b = 0$) .

  ☞Exemple : $(x-4)(x+6) = 0 \iff x - 4 = 0$ **ou** $x + 6 = 0 \iff x = \dots$ **ou** $x = \dots$
  L'ensemble des solutions est donc ....

- **Équation de type "$x^2 = a$" où a est un réel quelconque -préalablement fixé**

  Propriété :

  L'équation "$x^2 = a$" possède (sur $\mathbb{R}$) : $\begin{cases} \text{exactement deux solutions réelles } (\sqrt{a} \text{ et - } \sqrt{a}) & \textbf{si } a > 0 \\ \text{une solution réelle (il s'agit de 0)} & \textbf{si } a = 0 \\ \text{aucune solution réelle} & \textbf{si } a < 0 \end{cases}$.

  ☞Exemples : On considère deux nouvelles équations : $(\mathscr{E}_4) : z^2 = 7$ et $(\mathscr{E}_5) : z^2 = -9$.
  Les ensembles de solutions sont : $S_4 = \dots\dots\dots\dots$ et $S_5 = \dots$.

6.4 Systèmes d'(in/)équations

Dans certains problèmes, nous sommes amenés à résoudre plusieurs (in/)équations simultanément pour lesquelles **on ne retiendra que les solutions communes**. L'ensemble des (in/)équations est appelé *système*.

Pour signifier qu'elle forme un tout, on les regroupe d'**une seule** accolade (traditionnellement, à gauche).

☞Exemples : $(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} 3y+2=9z \\ 4x+7=10y \end{cases}$ est un système composé de … équations à … inconnues.

Le système $(\mathscr{S}_1)$ (que l'on se gardera bien de résoudre !) pourrait être disposé horizontalement et s'écrirait ainsi : $3y+2=9z$ **et** $4x+7=10y$.

$(\mathscr{S}_2) : \begin{cases} 9x-11>7 \\ 4x<5-x \end{cases}$ est un système formé de deux ………… à une ………… .

Puisque $9x-11>7 \iff$ ………… et $4x<5-x \iff$ ………… ,
l'ensemble de solutions (qui doivent concilier les deux contraintes) de $(\mathscr{S}_2)$ est …………… .

Si on considérait chacune des équations séparément et que l'on décrirait leur ensemble de solutions respectif, l'ensemble de solutions du système coïnciderait avec l' …………… de ces deux ensembles de solutions.

$(\mathscr{S}_3) : \begin{cases} x-7=0 \\ x^2=16 \end{cases}$ et $(\mathscr{S}_4) : \begin{cases} (x-4)(x+5)=0 \\ (x+5)(x-7)=0 \end{cases}$ sont deux …………de … équations à ………… .