Exercice 1 *L'inégalité de Bernoulli*

Le but de cet de cet exercice est d'établir l'inégalité de Bernoulli :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in [-1\,;+\infty[$, $(1+a)^n \geq 1+na$

Pour cela n désignant un entier naturel non nul fixé, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

$\mathcal{P}_n$: « pour tout $a \in [-1\,;+\infty[$, $(1+a)^n \geq 1+na$ »

1. Vérifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
2. On se place maintenant dans le cas où $n \geq 3$. On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par :
$$f(x) = x^n - (1 + n(x-1))$$
a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
b) Déterminer le sens de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire les variations de f.
c) Déduire du résultat de la question précédente que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
3. Conclure.

Exercice 2 *Une somme où π apparaît…*

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour $n \geq 1$.

1. Expliciter les quatre premiers termes de (u_n) et en donner une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près.
2. Justifier que (u_n) est strictement croissante.
3. a) Prouver que pour $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (*)$$
b) En sommant les inégalités (*) obtenues pour k variant de 2 à n, établir que $u_n < 2 - \frac{1}{n}$.
c) La suite (u_n) peut-elle tendre vers $+\infty$?

➡ ***On admet (u_n) converge vers le réel $l = \frac{\pi^2}{6}$***

d) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette limite l. En déduire, les premières décimales de π.
e) A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel entier n, on a $u_n > 1{,}6$ puis $u_n > 1{,}64$.

Exercice 3 *Un peu de trigonométrie*

Établir que pour tous réels p et q :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Exercice 4 *D'étranges inégalités…*

1. Démontrer que pour tous réels strictement positifs a, b et c :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geq 6$$

Indication : Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x+\frac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

2. Démontrer que pour tous réels a, b appartenant à $]0\,;1]$:

$$a+b+\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab$$

Indication : Etudier les variations de la fonction $x \mapsto (1-b)x+\frac{1-b}{bx}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

Bonnes vacances et reposez-vous bien tout en faisant un peu de maths si l'envie vous dit…