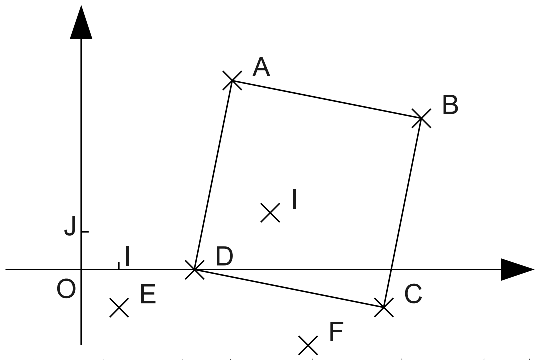
1 On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J).
Soient A(4 ; 5), B (9 ; 4), C(8 ; -1) et D(3 ; 0).
a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
b. Soit F de coordonnées (6 ; - 2). Calculer les coordonnées du point E tel que DCFE soit un parallélogramme.
c. Calculer les coordonnées du milieu I de [AF].
d. Est ce que I est le milieu de [EB] ? Justifier.

2 On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J).
a. Soient A(2;4), B(6;1), C(10;-2), D(2;-5), E(0;3), F(2;2) et G(-5;5).
b. Donner, en justifiant, les triplets de points alignés.
c. Déterminer le point d'intersection des droites (FC) et (BD)

3 Placer les points A(2 ; 5), B(-2 ; -1) et C(-3 ; 8). I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. Soit G le point de coordonnées (-1 ; 4).
a. Vérifier que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.
b. Même question pour $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BG}$, puis pour $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CG}$.
c. Que représente le point G pour le triangle ABC ?
d. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$.

4 Soit ABC un triangle quelconque. On place le point P symétrique de A par rapport à B, le point Q symétrique de B par rapport à C et le point R symétrique de C par rapport à A. On appelle I le milieu de [BC] et K le milieu de [PQ]. On appelle G et H les centres de gravité des triangles ABC et PQR.
On choisit le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
a. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
b. Déterminer les coordonnées du point I, puis celles du point G.
c. Déterminer les coordonnées des points R, P, Q et K.
d. Démontrer que les points G et H sont confondus.

1



a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9-4\\4-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}8-3\\-1-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

$AB=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

$BC=\sqrt{(8-9)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{26}$

ABCD est un parallélogramme ayant deux côtés opposés de même longueur, c'est donc un losange.

$AC=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{52}$ AC² = AB² + BC².

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

ABCD est donc un losange ayant un angle droit.

ABCD est un carré

b. Soit $(x_E ; y_E)$ les coordonnées de E. $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}x_E-6\\y_E+2\end{pmatrix}$

. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ Comme DCFE est un parallélogramme,

on a $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CD}$. Donc,

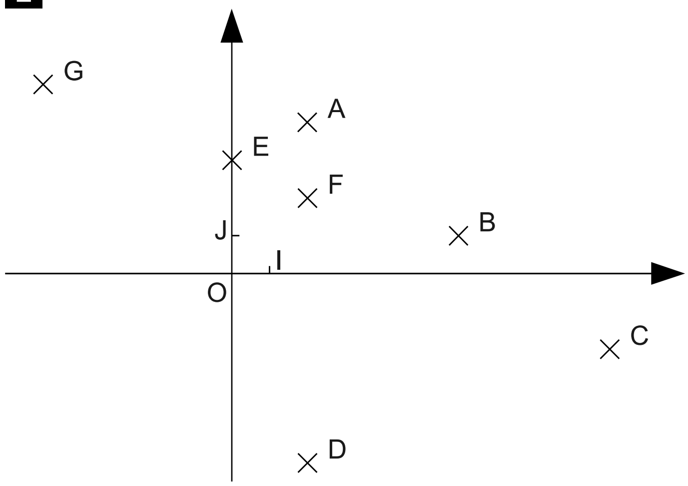
$\begin{cases}x_E-6=-5\\y_E+2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_E=1\\y_E=-1\end{cases}$ E (1 ; - 1)

c. $x_I=\frac{x_A+x_F}{2}=\frac{4+6}{2}=5$. $y_I=\frac{y_A+y_F}{2}=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2}$

I (5 ; 1,5)

d. I est le milieu de [EB]. En effet, $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. Donc ABFE est un parallélogramme. Le milieu de la diagonale [EB] est donc le milieu de la diagonale [AF]. C'est donc le point I.

2



a. A, F et D ont la même abscisse, ils sont donc alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-2\\1-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10-6\\-2-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. Les points A, B et C sont donc alignés. B est même le milieu de [AC].

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2-0\\2-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}10-2\\-2-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$

-8 + 8 = 0. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires. Les points E,F et C sont donc alignés.

$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$. $5-4=1\neq 0$. $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires. E, F et G ne sont pas alignés.

On montre de même qu'il n'y a pas d'autres triplets de points alignés.

b. Soit K $(x_K ; y_K)$ le point d'intersection des droites (FC) et (BD).

$\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}x_K-2\\y_K-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc

$8(y_K-2)+4(x_K-2)=0 \Leftrightarrow 4x_k+8y_k=24 \Leftrightarrow 2x_k+4y_k=1$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}x_K-2\\y_K+5\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc

$-4(y_K-2)+6(x_K-6)=0 \Leftrightarrow 6x_K-4y_K=28$

En ajoutant les deux équations, on obtient :

$8x_k=40$ soit $x_K=5$.

$y_K=\frac{1}{2}$. K $\left(5 ; \frac{1}{2}\right)$

3

a. $I\left(\frac{x_B+x_C}{2} ; \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ $I\left(-\frac{5}{2} ; \frac{7}{2}\right)$

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}-2\\ \frac{7}{2}-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1-2\\4-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.

$J\left(-\frac{1}{2};\frac{13}{2}\right)$ $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$

$K(0;2)$, $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$

b. G est le centre de gravité du triangle ABC.

c. $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

4

a. A(0;0), B(1;0) et C(0;1).

b. $I\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$, $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Le point G est le point d'intersection des médianes du triangle ABC. Soit J le milieu du segment [AC].

$J\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires. On en déduit que $y_G=x_G$.

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G-1\\y_G\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc

$\frac{1}{2}(x_G-1)+y_G=0$

Finalement, $y_G=x_G=\frac{1}{3}$ $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

c. R(0;-1), P(2;0), Q(-1;2) et K(0,5;1).

d. $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires, donc G est sur la médiane (RK).

Soit L le milieu du segment [RP]. $L\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{QL}\begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QG}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc G est sur la médiane (QL). G est à l'intersection de deux médianes du triangle RPQ. C'est donc le centre de gravité de RPK. Donc G=H.