Second degré

Savoir faire

- ☐ Identifier un trinôme, l'écrire sous différentes formes : factorisée, développée, canonique
- ☐ Résoudre une équation du second degré
- ☐ Résoudre une inéquation du second degré
- ☐ Donner l'allure de la courbe représentant une fonction du second degré, préciser les variations et extrema de la fonction

I Trinôme - Discriminant - Forme canonique

Définition : 1 *On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.*
On dit que $ax^2 + bx + c$ est alors un polynôme du second degré ou un trinôme.

Définition : 2 *Le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le réel noté Δ défini par :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Définition : 3 *La forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est*

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

II Équation du second degré

On cherche à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions que l'on nomme « racines » du trinôme.
Si la résolution n'est pas immédiate, on peut appliquer la méthode suivante :
On commence par calculer $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $\Delta = 0$ alors $\mathcal{S} = \{x_0\}$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $\mathcal{S} = \{x_1; x_2\}$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

III Signe du trinôme

La résolution d'une inéquation du second degré est liée à l'étude du signe du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors pour tout réel $x \neq x_0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines, de signe contraire à a entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

☛ Attention ! Ici x_1 et x_2 doivent être classés du plus petit au plus grand.

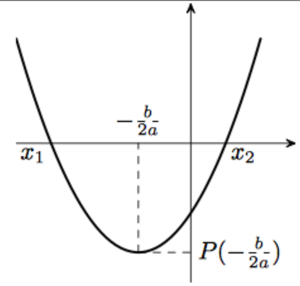
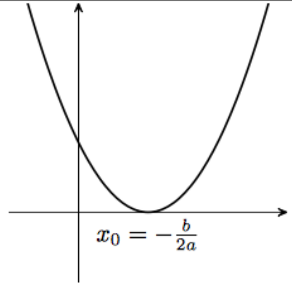
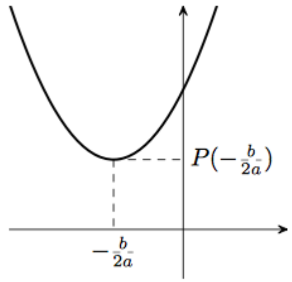
IV Etude de la fonction

La courbe représentative de la fonction P définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

- Si $a > 0$ alors P est décroissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$ et P admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.
- Si $a < 0$ alors P est croissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et décroissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$ et P admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{-b}{2a}$. La parabole admet pour axe de symétrie la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

V Tableau de synthèse

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Factorisation de $P(x)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	pas de factorisation
Équation $P(x)=0$	2 solutions x_1 et x_2	une solution x_0	pas de solution
$a > 0$			
$a < 0$